

L'ALGEBRE DE HOPF BITENSORIELLE

Dominique Manchon

Institut Elie Cartan
CNRS
BP 239
54506 Vandoeuvre les Nancy Cedex, France
e-mail : manchon@iecn.u-nancy.fr

Résumé

Nous construisons pour tout corps k de caractéristique zéro un foncteur de la catégorie des k -espaces vectoriels dans la catégorie des k -algèbres de Hopf pointées, qui à tout espace vectoriel V associe son *algèbre de Hopf bitensorielle pointée* \mathcal{A}_V . Cette algèbre de Hopf est graduée, vérifie une propriété universelle, et contient une famille remarquable d'éléments primitifs \mathcal{P} . Nous conjecturons que \mathcal{P} engendre l'algèbre de Lie des éléments primitifs de \mathcal{A}_V . Enfin lorsque V est de dimension finie nous mettons en évidence un couplage de Hopf entre \mathcal{A}_V et \mathcal{A}_V^* dont le noyau contient l'idéal (de Hopf) engendré par les éléments de \mathcal{P} de degré au moins égal à 2.

Abstract

For any field k of zero characteristic we give a functor from the category of k -vector spaces into the category of k -Hopf algebras, attaching to any vector space V its *bitensorial pointed Hopf algebra* \mathcal{A}_V . This Hopf algebra is graded, fulfills a universal property, and contains a remarkable subspace \mathcal{P} of primitive elements, which as a conjecture may generate the Lie algebra $\text{Prim } \mathcal{A}_V$. In case V is finite-dimensional we exhibit a Hopf pairing between \mathcal{A}_V and \mathcal{A}_V^* whose kernel contains the (Hopf) ideal generated by the elements of \mathcal{P} of degree ≥ 2 .

Introduction

Etant donné un espace vectoriel V sur un corps k , on sait lui associer de manière fonctorielle une algèbre, son algèbre tensorielle $T(V)$, qui contient V de manière naturelle, et qui vérifie de plus la propriété universelle suivante : pour toute algèbre A et pour toute application linéaire f de V dans A il existe un unique morphisme d'algèbres \bar{f} de $T(V)$ dans A qui prolonge f .

Nous montrons ici qu'une construction similaire est possible dans la catégorie des algèbres de Hopf pointées : on considère sur l'espace $T(V)$ la structure de cogèbre obtenue

en dualisant la structure d'algèbre de $T(V^*)$. La comultiplication est donnée par :

$$\Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i=0}^n (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i) \tilde{\otimes} (x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n)$$

et la co-unité ε par le terme constant. Appliquant le foncteur "algèbre tensorielle" à la comultiplication Δ et à la co-unité ε nous munissons de manière naturelle la double algèbre tensorielle $T(T(V))$ d'une structure de bigèbre. Identifiant les puissances de l'unité c de $T(V)$ et l'unité 1 de $T(T(V))$, qui sont les éléments de type groupe de la bigèbre, on obtient une bigèbre pointée \mathcal{A}_V qui se trouve être une algèbre de Hopf.

Lorsque le corps est de caractéristique nulle, l'antipode est d'ordre infini et admet une expression explicite : on définit S_0 comme l'unique antimorphisme d'algèbres tel que :

$$S_0|_{T(V)} = -I + 2u\varepsilon$$

et l'opérateur de césure U comme l'unique dérivation de \mathcal{A}_V telle que :

$$U|_{T(V)} = (I - u\varepsilon) * (I - u\varepsilon)$$

où l'étoile désigne le produit de convolution [Ab, Sw]. On a alors : (Théorème I.3) :

$$S = (\exp -U).S_0$$

La construction est fonctorielle, et l'algèbre de Hopf pointée \mathcal{A}_V ainsi construite vérifie la propriété universelle suivante : pour tout espace vectoriel V sur k , pour toute algèbre de Hopf pointée \mathcal{H} et pour tout morphisme de cogèbres f de $T(V)$ dans \mathcal{H} il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf \tilde{f} de \mathcal{A}_V dans \mathcal{H} qui prolonge f . On peut enlever le mot "pointée" dans l'énoncé en remplaçant \mathcal{A}_V par $\tilde{\mathcal{A}}_V$, obtenue à partir de $T(T(V))$ en rajoutant formellement les inverses des éléments de type groupe (§ I.6).

Le deuxième résultat est le théorème I.5, qui met en évidence une famille d'éléments primitifs : on montre que pour tout tenseur symétrique $v \in T(V)$ l'élément $\varphi(U)v$ est primitif, où φ est la série entière définie par :

$$\varphi(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z}$$

Nous conjecturons que cette famille engendre l'algèbre de Lie des éléments primitifs de \mathcal{A}_V .

Dans la deuxième partie nous mettons en évidence, dans le cas où l'espace vectoriel V est de dimension finie, un couplage de Hopf entre \mathcal{A}_V et \mathcal{A}_V^* , dont le noyau contient l'idéal engendré par l'ensemble des $\varphi(U)v$, $v \in S^{(2)}(V)$. (Théorème II.1).

On obtient bon nombre d'algèbres intéressantes (algèbre symétrique ou extérieure, algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, etc.) comme quotient de l'algèbre tensorielle

par un idéal bien choisi. On peut de même espérer retrouver des algèbres de Hopf comme quotients ou sous-quotients de l'algèbre de Hopf bitensorielle par un idéal de Hopf ad hoc. Par exemple les algèbres enveloppantes quantifiées pourraient être obtenues à partir de l'algèbre de Hopf topologique $\mathcal{A}_V[[h, t]]$ sur l'anneau $k[[h, t]]$, où V est une bigèbre de Lie [Dr,E-K, R]. Nous espérons revenir sur cette question dans un prochain article.

L'auteur tient à remercier Alain Fuser, Pierre-Yves Gaillard, Guy Rousseau et Marc Rosso pour d'utiles discussions, ainsi que Pierre Marchand pour les aspects combinatoires du théorème I.5, et Olivier Ramaré pour la démonstration du non moins combinatoire lemme II.7.

I. L'algèbre de Hopf bitensorielle

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k , et soit $T(V)$ son algèbre tensorielle. On munit un quotient de la double algèbre tensorielle $T(T(V))$ d'une structure naturelle d'algèbre de Hopf, ni commutative ni cocommutative, dont l'antipode, d'ordre infini, admet une expression explicite.

I.1. La bigèbre bitensorielle

On désigne par $T(V)$ l'algèbre tensorielle de V définie par :

$$T(V) = kc \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots$$

où c désigne l'unité du corps k . C'est l'élément central normalisé de l'algèbre $T(V)$. On s'intéressera à la structure de cogèbre sur $T(V)$ dont la comultiplication :

$$\Delta : T(V) \longrightarrow T(V) \tilde{\otimes} T(V)$$

est définie par $\Delta(c) = c \tilde{\otimes} c$ et :

$$\Delta(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \sum_{j=0}^k (x_1 \otimes \dots \otimes x_j) \tilde{\otimes} (x_{j+1} \otimes \dots \otimes x_k)$$

On a noté $\tilde{\otimes}$ le produit tensoriel ci-dessus pour ne pas le confondre avec le produit tensoriel \otimes constitutif de $T(V)$. On vérifie facilement que Δ est co-associative, et que l'application de $T(V)$ dans k qui à tout élément associe son "terme constant" est la co-unité.

On considère alors la double algèbre tensorielle :

$$\mathcal{A}_0 = T(T(V)) = k \oplus T(V) \oplus T(V)^{\bullet 2} \oplus \dots$$

où l'on note avec un gros point (\bullet) le second produit tensoriel, pour ne pas le confondre avec le \otimes de $T(V)$. La comultiplication se prolonge en un unique morphisme d'algèbres :

$$\Delta : \mathcal{A}_0 \longrightarrow T(T(V) \tilde{\otimes} T(V))$$

Or l'algèbre $T(T(V) \tilde{\otimes} T(V))$ se plonge dans $\mathcal{A}_0 \tilde{\otimes} \mathcal{A}_0$ via :

$$(a_1 \tilde{\otimes} b_1) \bullet \cdots \bullet (a_k \tilde{\otimes} b_k) \longmapsto (a_1 \bullet \cdots \bullet a_k) \tilde{\otimes} (b_1 \bullet \cdots \bullet b_k)$$

De même la co-unité s'étend en un unique morphisme d'algèbres :

$$\varepsilon : \mathcal{A}_0 \longrightarrow k$$

ce qui munit $(\mathcal{A}_0, \bullet, \Delta, 1, \varepsilon)$ d'une structure naturelle de bigèbre.

On appelle *mot* un élément indécomposable de $T(V)$, et on appelle *phrase* un élément indécomposable $v_1 \bullet \cdots \bullet v_k$ de \mathcal{A}_0 , où chaque v_j est lui-même un mot.

I.2. L'algèbre de Hopf bitensorielle pointée

On considère dans \mathcal{A}_0 l'idéal bilatère \mathcal{I} engendré par $c - 1$. La relation :

$$\Delta(c - 1) = c \tilde{\otimes} c - 1 \tilde{\otimes} 1 = (c - 1) \tilde{\otimes} c + 1 \tilde{\otimes} (c - 1)$$

montre que \mathcal{I} est un bi-idéal. Le quotient :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 / \mathcal{I}$$

hérite donc naturellement d'une structure de bigèbre [Ab th. 4.2.1]. Les éléments de type groupe de \mathcal{A}_0 (c'est à dire vérifiant $\Delta(x) = x \tilde{\otimes} x$) sont les puissances de c . Le seul élément de type groupe de \mathcal{A} est donc l'unité, c'est à dire que la bigèbre \mathcal{A} est pointée. Par ailleurs le plongement canonique de $T(V)$ dans son algèbre tensorielle \mathcal{A}_0 induit un plongement naturel de $T(V)$ dans \mathcal{A} , et $T(V)$ engendre alors l'algèbre \mathcal{A} .

On note m la multiplication de $\mathcal{A} \tilde{\otimes} \mathcal{A}$ dans \mathcal{A} , et u l'application unité : $k \rightarrow \mathcal{A}$ qui à λ associe $\lambda.1$. On cherche un antipode, c'est à dire par définition une application $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que le diagramme ci-dessous commute :

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathcal{A} \tilde{\otimes} \mathcal{A} & \xrightarrow{S \tilde{\otimes} I} & \mathcal{A} \tilde{\otimes} \mathcal{A} \\ & \nearrow \Delta & & & \searrow m \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\varepsilon} & k & \xrightarrow{u} & \mathcal{A} \\ & \searrow \Delta & & & \nearrow m \\ & & \mathcal{A} \tilde{\otimes} \mathcal{A} & \xrightarrow{I \tilde{\otimes} S} & \mathcal{A} \tilde{\otimes} \mathcal{A} \end{array}$$

On a $\Delta(1) = 1 \tilde{\otimes} 1$ d'où nécessairement $S(1) = 1$. Pour tout $x \in V$ on a : $\Delta(x) = 1 \tilde{\otimes} x + x \tilde{\otimes} 1$ (puisque c et 1 sont maintenant identiques dans \mathcal{A}), d'où on déduit, compte tenu du diagramme ci-dessus :

$$S(x) = -x$$

Essayons de déterminer $S(x \otimes y)$ pour $x, y \in V$: la partie supérieure du diagramme se lit :

$$m(I \tilde{\otimes} S) \Delta(x \otimes y) = 0$$

soit :

$$m(I \tilde{\otimes} S)(1 \tilde{\otimes} x \otimes y + x \tilde{\otimes} y + x \otimes y \tilde{\otimes} 1) = 0$$

soit encore :

$$S(x \otimes y) - x \bullet y + x \otimes y = 0$$

d'où finalement :

$$S(x \otimes y) = x \bullet y - x \otimes y$$

On vérifie immédiatement que la partie inférieure du diagramme commute, c'est à dire que :

$$m(S \tilde{\otimes} I)\Delta(x \otimes y) = 0$$

Au cran suivant, en suivant la même méthode on trouve :

$$S(x \otimes y \otimes z) = -x \otimes y \otimes z + x \bullet (y \otimes z) + (x \otimes y) \bullet z - x \bullet y \bullet z$$

Un simple raisonnement par récurrence nous conduit donc au théorème suivant :

Theorème I.1.

Pour tout espace vectoriel V de dimension finie sur un corps k de caractéristique zéro, le quotient \mathcal{A} de la bigèbre bitensorielle $T(T(V))$ par le bi-idéal \mathcal{I} engendré par la relation : $c = 1$ admet un (unique) antipode S , d'ordre infini, donné par la formule :

$$S(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{J \subset \{1, \dots, k-1\}} (-1)^{k+|J|} \varphi_J(x_1, \dots, x_k)$$

avec :

$$\varphi_J(x_1, \dots, x_k) = x_1 *_J \cdots *_J x_k$$

où $x_j *_J x_{j+1}$ est égal à $x_j \otimes x_{j+1}$ si $j \in J$, et à $x_j \bullet x_{j+1}$ si $j \notin J$, la loi \otimes étant supposée prioritaire devant la loi \bullet .

Démonstration. On a vérifié le théorème pour $k \leq 3$. Une simple récurrence à l'aide de la partie supérieure du diagramme fournit la formule donnée dans l'énoncé, et on vérifie facilement que la partie inférieure du diagramme commute aussi. On obtient ainsi l'expression de l'antipode sur $T(V)$, et donc sur tout \mathcal{A} puisque S est un antimorphisme d'algèbres. Reste à vérifier que le diagramme commute pour tout élément de \mathcal{A} . Ceci résulte directement de la proposition suivante : [K, lemma III.3.6]

Proposition I.2.

Soit $(B, m, \Delta, u, \varepsilon)$ une bigèbre, G une partie de B engendrant B en tant qu'algèbre, et S un anti-morphisme d'algèbres tel que le diagramme () commute pour tout élément de G . Alors S est un antipode.*

Fin de la démonstration du théorème : On remarque que pour tout $x, y \in V$ on a :

$$S^2(x \otimes y) = x \otimes y - (x \bullet y - y \bullet x)$$

d'où on déduit immédiatement :

$$S^{2p}(x \otimes y) = x \otimes y - p(x \bullet y - y \bullet x)$$

ce qui montre que l'antipode est d'ordre infini. •

I.3. L'opérateur de césure

On supposera dorénavant que le corps de base est de caractéristique nulle. On désigne par S_0 l'unique anti-automorphisme de l'algèbre \mathcal{A} qui vérifie :

$$S_0|_{T(V)} = -I + 2u\varepsilon$$

Le composé SS_0 est alors l'unique automorphisme de l'algèbre \mathcal{A} qui s'exprime sur $T(V)$ par :

$$SS_0(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{J \subset \{1, \dots, k-1\}} (-1)^{k+|J|+1} \varphi_J(x_1, \dots, x_k)$$

Théorème I.3.

Soit U l'unique dérivation de l'algèbre \mathcal{A} telle que :

$$U|_{T(V)} = m\Delta - 2I + u\varepsilon$$

Alors on a :

$$SS_0 = \exp -U$$

Démonstration. $U(1) = 0$, et $U(x) = 0$ pour tout $x \in V$. Sur les éléments de $T(V)$ de degré supérieur on a :

$$U(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{j=1}^{k-1} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_j) \bullet (x_{j+1} \otimes \cdots \otimes x_k)$$

On en déduit facilement que pour $r < k$ on a :

$$U^r(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = r! \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq k-1} x_1 \otimes \cdots \otimes x_{j_1} \bullet x_{j_1+1} \otimes \cdots \otimes x_{j_2} \bullet \cdots \bullet x_{j_r+1} \otimes \cdots \otimes x_k$$

alors que $U^r(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = 0$ pour $r \geq k$. Le théorème s'en déduit aussitôt. •

Corollaire I.4.

Soit C une sous-cogèbre de $T(V)$. Alors la bigèbre $\mathcal{C} = T(C)/\mathcal{I} \cap T(C)$ est une sous-algèbre de Hopf de \mathcal{A} .

Démonstration. Il est clair que U respecte \mathcal{C} , donc $SS_0 = \exp -U$ aussi. Comme d'autre part il est évident que S_0 a la même propriété, on en déduit que \mathcal{C} est stable par $S = (\exp -U)S_0$.

Définition : On appelle *opérateur de césure de l'algèbre de Hopf \mathcal{A}* la dérivation U définie dans ce paragraphe. Cet opérateur associe à un mot la somme de toutes les phrases obtenues en coupant ce mot en deux mots effectifs, c'est à dire de longueur non nulle.

Remarque : une autre méthode de construction de l'antipode fait appel au produit de convolution : on considère l'égalité formelle :

$$\begin{aligned} S &= I^{*-1} = (u\varepsilon - (u\varepsilon - I))^{*-1} \\ &= \sum_{k \geq 0} (u\varepsilon - I)^{*k} \end{aligned}$$

On montre ensuite facilement que pour tout $v \in T(V)$ et pour tout $k \geq 2$ on a :

$$(u\varepsilon - I)^{*k}(v) = (-1)^k \frac{U^{k-1}}{(k-1)!}(v)$$

ce qui donne un sens à l'égalité ci-dessus, et ce qui montre aussi que pour tout $v \in T(V)$ on a :

$$S(v) = 2u\varepsilon(v) - \exp -U(v)$$

ce qui nous permet de retrouver l'expression de l'antipode donnée par le théorème I.3.

I.4. Une famille d'éléments primitifs

On suppose toujours que le corps est de caractéristique zéro, et on conserve les notations du paragraphe précédent. Un *élément primitif* d'une algèbre de Hopf est un élément v qui vérifie :

$$\Delta(v) = 1 \tilde{\otimes} v + v \tilde{\otimes} 1$$

Un élément primitif vérifie toujours : $S(v) = -v$.

Soit \mathcal{A} l'algèbre de Hopf bitensorielle construite sur un espace vectoriel V de dimension finie. Alors tout élément de V est un élément primitif de \mathcal{A} . Si x et y appartiennent à V on vérifie aisément que l'élément :

$$v = x \otimes y + y \otimes x - \frac{1}{2}(x \bullet y + y \bullet x)$$

est primitif. Nous allons décrire un procédé qui permet d'associer un élément primitif à tout tenseur symétrique :

On désigne par φ la série entière définie par :

$$\varphi(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z} = \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(p+1)!} z^p$$

Theorème I.5.

Pour tout tenseur symétrique $v_0 \in T(V)$ l'élément :

$$v = \varphi(U)(v_0)$$

est primitif.

Démonstration. On considère l'espace $\mathcal{A}[[t]]$ des séries formelles à coefficients dans \mathcal{A} . Cet espace est muni d'une structure d'algèbre de Hopf topologique sur $k[[t]]$ [Dr, E-K]. Pour tout $x \in V$ on considère l'élément :

$$g_x = (1 - tx)^{\otimes -1} = 1 + \sum_{k \geq 1} t^k x^{\otimes k}$$

Un calcul immédiat montre que cet élément est de type groupe, c'est à dire qu'il vérifie :

$$\Delta g_x = g_x \tilde{\otimes} g_x$$

On en déduit que :

$$\log g_x = \sum_{k \geq 1} t^k x^{\otimes k} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k \geq 1} t^k x^{\otimes k} \right)^{\bullet 2} + \frac{1}{3} \left(\sum_{k \geq 1} t^k x^{\otimes k} \right)^{\bullet 3} - \dots$$

est primitif dans $\mathcal{A}[[t]]$, c'est à dire que pour tout entier $n \geq 1$ le terme en t^n dans la somme ci-dessus est primitif dans \mathcal{A} . Or ce terme est précisément $\varphi(U)(x^{\otimes n})$. Pour passer du tenseur symétrique $x^{\otimes n}$ à un tenseur symétrique quelconque on utilise le principe d'inclusion-exclusion :

On considère dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}^k$ le sous-ensemble B des k -uplets où toutes les lettres apparaissent, et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ le sous-ensemble A_j des k -uplets où la lettre j n'apparaît pas. On a alors :

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_n)^{\otimes k} &= \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in B} x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_k} + \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in A_{q_1} \cap \dots \cap A_{q_p}} x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_k} \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in B} x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_k} + \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq q_1 < \dots < q_p \leq n} (x_1 + \dots + \widehat{x_{q_1}} \dots + \widehat{x_{q_p}} \dots + x_n)^{\otimes k} \end{aligned}$$

Il suffit alors de faire $k = n$ et d'appliquer $\varphi(U)$ aux deux membres de l'égalité ci-dessus pour obtenir le théorème.

•

I.5. Le foncteur \mathcal{A}

L'opération qui consiste à associer à un espace vectoriel V de dimension finie son algèbre de Hopf bitensorielle pointée \mathcal{A}_V est un foncteur de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie des algèbres de Hopf pointées (c'est à dire contenant un unique élément de type groupe). En effet si $f : V \rightarrow W$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie, $T(T(f))$ envoie l'idéal \mathcal{I} de V dans l'idéal \mathcal{I} de W et définit donc par passage au quotient un morphisme de bigèbres :

$$\mathcal{A}_f : \mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{A}_W$$

qui est donc un morphisme d'algèbres de Hopf [Sw]

Enfin l'algèbre de Hopf pointée \mathcal{A}_V vérifie la propriété universelle suivante : pour toute algèbre de Hopf pointée \mathcal{H} et pour tout morphisme de cogèbres ψ de $T(V)$ dans \mathcal{H} il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\bar{\psi}$ de \mathcal{A}_V dans \mathcal{H} tel que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \hookrightarrow & \mathcal{A}_V \\ \downarrow \psi & \swarrow \bar{\psi} & \\ \mathcal{H} & & \end{array}$$

I.6. L'algèbre de Hopf bitensorielle universelle

On peut modifier un peu la construction ci-dessus de manière à obtenir une algèbre de Hopf qui vérifie la propriété universelle du §I.5 pour toute algèbre de Hopf \mathcal{H} pointée ou non : on considère dans $\mathcal{A}_0[t]$ l'idéal \mathcal{J} engendré par $\{c \bullet v - v \bullet c, v \in \mathcal{A}_0\}$ et par $ct - 1$, et on pose :

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0[t]/\mathcal{J}$$

On vérifie facilement que $\tilde{\mathcal{A}}$ est une algèbre de Hopf, et qu'on a une formule explicite pour l'antipode : si U désigne l'opérateur de césure défini comme pour \mathcal{A} on a :

$$SS_0 = C^{-1} \exp -UC^{-1}$$

où C désigne l'automorphisme d'algèbres tel que $C(v) = c \bullet v$ pour tout $v \in T(V)$. Pour tout tenseur symétrique $v \in T(V)$ c'est alors l'élément $C^{-1}\varphi(U)(v)$ qui est primitif.

II. Un couplage (dégénéré) entre deux algèbres de Hopf

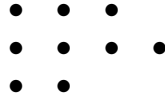
Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et V^* son dual. Soit \mathcal{A} (resp. $\bar{\mathcal{A}}$) l'algèbre de Hopf bitensorielle construite sur V (resp. v^*). On désigne par la même lettre U les opérateurs de césure de \mathcal{A} et $\bar{\mathcal{A}}$.

Dans ce paragraphe on met en évidence un couplage dégénéré non nul entre les deux algèbres de Hopf \mathcal{A} et $\bar{\mathcal{A}}$.

Theorème II.1.

Il existe un couplage de Hopf non nul $\langle ., . \rangle$ entre les deux algèbres de Hopf \mathcal{A} et $\overline{\mathcal{A}}$, tel que tout $v \in \varphi(U).S^{(2)}(V)$ est dans le noyau $\overline{\mathcal{A}}^\perp$ (resp. tout $\alpha \in \varphi(U).S^{(2)}(V^*)$ est dans le noyau \mathcal{A}^\perp).

Démonstration. Nous aurons besoin de quelques préliminaires combinatoires. A toute phrase de \mathcal{A} ou de $\overline{\mathcal{A}}$ on peut associer son *type* $J = (j_1, \dots, j_r)$, où j_q est la longueur du $q^{\text{ième}}$ mot la constituant. On appellera aussi indifféremment *type* la partie de \mathbb{N}^{*2} constituée des (q, j) , $q \leq r$ et $j \leq j_q$, et on notera cette partie par la même lettre J . On notera J_p la $p^{\text{ième}}$ ligne du type J . Tout type se représente par un diagramme de Young : ci-dessous le type $(3, 4, 2)$.



Pour toute phrase v de type J dont les lettres s'écrivent $(x_q)_{q \in J}$ dans l'ordre lexicographique, et pour toute partie L de J on peut faire de L un type de façon évidente (en "justifiant à gauche"), et considérer la phrase v_L de type L extraite de v dont les lettres sont les $(x_q, q \in L)$, rangées par ordre lexicographique.

On considère sur \mathbb{N}^{*2} deux relations d'ordre strict : l'ordre lexicographique strict $<$ et un ordre partiel strict \prec défini par : $(x, y) \prec (x', y')$ si et seulement si $x = x'$ et $y < y'$.

Soient J et K deux types de même cardinal. Une *bonne bijection* de J sur K est une bijection φ telle que :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) \prec \varphi(x', y') &\implies (x, y) < (x', y') \\ (x, y) \prec (x', y') &\implies \varphi(x, y) < \varphi(x', y') \end{aligned}$$

La proposition suivante découle immédiatement de la définition :

Proposition II.2.

Soient J et K deux types de même cardinal. Alors si φ est une bonne bijection de J sur K , φ^{-1} est une bonne bijection de K sur J .

On notera σ_{JK} l'ensemble des bonnes bijections de J sur K . A toute bonne bijection φ entre deux types $J = (j_1, \dots, j_r)$ et $K = (k_1, \dots, k_s)$ de même cardinal on associe une *J-partition* de K :

$$K = K_1(J, \varphi) \amalg \dots \amalg K_r(J, \varphi)$$

avec :

$$K_p(J, \varphi) = \varphi(J_p)$$

D'après la proposition II.2 on peut associer à toute J -partition de K une K -partition de J et réciproquement. On dira que ces partitions de J et de K sont duales l'une de

l'autre. Ci-dessous nous avons représenté une bonne bijection entre deux types J et K de cardinal 9, et les deux partitions duales associées.

1	2	3	4		7	8	9
5	6				1		
7	8	9			2	5	
					3	4	6

Il nous reste encore à définir le *nombre d'horizontalité* h_φ d'une bonne bijection φ entre deux types $J = (j_1, \dots, j_r)$ et $K = (k_1, \dots, k_s)$ de même cardinal :

$$h_\varphi = \prod_{\substack{p=1, \dots, r \\ q=1, \dots, s}} (\text{card}(\varphi(J_p) \cap K_q))!$$

Proposition II.3.

φ et φ^{-1} ont même nombre d'horizontalité

Démonstration. En appliquant la bijection φ^{-1} aux ensembles $\varphi(J_p) \cap K_q$ on a aussi :

$$h_\varphi = \prod_{\substack{p=1, \dots, r \\ q=1, \dots, s}} (\text{card}(J_p \cap \varphi^{-1}(K_q)))!$$

qui est par définition égal à $h_{\varphi^{-1}}$.

•

On définit alors le couplage entre \mathcal{A} et $\overline{\mathcal{A}}$ de la façon suivante :

- 1) L'unité de \mathcal{A} (resp $\overline{\mathcal{A}}$) est orthogonale à toute phrase de $\overline{\mathcal{A}}$ (resp. \mathcal{A}) de longueur non nulle, et $\langle 1_{\mathcal{A}}, 1_{\overline{\mathcal{A}}} \rangle = 1$
- 2) Si v est une phrase de \mathcal{A} de type $J = (j_1, \dots, j_r)$ et α une phrase de $\overline{\mathcal{A}}$ de type $K = (k_1, \dots, k_s)$, dont les lettres sont notées $(x_q)_{q \in J}$ (resp. $(\xi_q)_{q \in K}$) alors :

$$\langle v, \alpha \rangle = \sum_{\varphi \in \sigma_{JK}} \frac{1}{h_\varphi} \prod_{q \in J} \langle x_q, \xi_{\varphi(q)} \rangle$$

ou encore, compte tenu de la proposition II.3 :

$$\langle v, \alpha \rangle = \sum_{\psi \in \sigma_{KJ}} \frac{1}{h_\psi} \prod_{q \in K} \langle x_{\psi(q)}, \xi_q \rangle$$

En particulier : a) Si v et α sont de longueurs différentes, $\langle v, \alpha \rangle = 0$

b) pour toute famille (x_1, \dots, x_n) d'éléments de V et pour toute famille (ξ_1, \dots, ξ_n) d'éléments de V^* on a :

$$\langle x_1 \otimes \dots \otimes x_n, \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \rangle = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \langle x_i, \xi_i \rangle$$

c) Si $v = v_1 \bullet \cdots \bullet v_r$ est une phrase de \mathcal{A} de type $J = (j_1, \dots, j_r)$ de longueur n , chaque v_p étant un mot de longueur j_p , on a pour tout mot α de longueur n dans $T(V^*) \subset \overline{\mathcal{A}}$:

$$\langle v, \alpha \rangle = \frac{n!}{j_1! \cdots j_r!} \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_r, \alpha \rangle$$

d) Si $\alpha = \alpha_1 \bullet \cdots \bullet \alpha_s$ est une phrase de $\overline{\mathcal{A}}$ de type $K = (k_1, \dots, k_s)$ de longueur n , chaque α_p étant un mot de longueur k_p , on a pour tout mot v de longueur n dans $T(V) \subset \mathcal{A}$:

$$\langle v, \alpha \rangle = \frac{n!}{k_1! \cdots k_s!} \langle v, \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \rangle$$

Soit une phrase v de \mathcal{A} , de longueur n , qui s'écrit comme produit de deux sous-phrases : $v = v_1 \bullet v_2$. Le type J de v s'écrit (avec une notation évidente qui se passe de commentaires) : $J = \begin{smallmatrix} J_1 \\ J_2 \end{smallmatrix}$, où J_1 (resp. J_2) désigne le type de v_1 (resp. v_2).

Soit maintenant α une phrase de $\overline{\mathcal{A}}$ de longueur n de type K . Toute bonne bijection φ de J sur K induit par restriction une bonne bijection φ_1 de J_1 sur une partie K' de K , et une bonne bijection φ_2 de J_2 sur le complémentaire K'' . Réciproquement tout couple (φ_1, φ_2) de bonnes bijections, $\varphi_1 : J_1 \rightarrow K'$ et $\varphi_2 : J_2 \rightarrow K''$, où (K', K'') forme une partition de K telle qu'aucun élément de K'' ne précède par l'ordre \prec un élément de K' , induit une bonne bijection φ de J sur K , et il est clair qu'on a :

$$h_\varphi = h_{\varphi_1} h_{\varphi_2}$$

Appelons un couple (K', K'') comme ci-dessus un *bon découpage* de K . Soient $(x_q)_{q \in J}$ (resp. $(\xi_q)_{q \in K}$) les lettres qui composent v (resp. α). On a d'après ce qui précède :

$$(*) \quad \langle v_1 \bullet v_2, \alpha \rangle = \sum_{(K', K'') \in D_K} \sum_{\substack{\varphi_1 \in \sigma_{J_1 K'} \\ \varphi_2 \in \sigma_{J_2 K''}}} \frac{1}{h_{\varphi_1} h_{\varphi_2}} \prod_{q \in J_1} \langle x_q, \xi_{\varphi_1(q)} \rangle \prod_{q \in J_2} \langle x_q, \xi_{\varphi_2(q)} \rangle$$

où D_K désigne l'ensemble des bons découpages de K . D'autre part, on voit facilement que :

$$\Delta \alpha = \sum_{(K', K'') \in D_K} \alpha_{K'} \tilde{\otimes} \alpha_{K''}$$

d'où grâce à (*) :

$$\langle v_1 \bullet v_2, \alpha \rangle = \langle v_1 \tilde{\otimes} v_2, \Delta \alpha \rangle$$

La démonstration de la deuxième assertion du théorème est alors immédiate, compte tenu du rôle symétrique joué par \mathcal{A} et $\overline{\mathcal{A}}$, mis en évidence par les propositions II.2 et II.3. Le théorème II.1 est donc démontré. •

Corollaire II.4.

L'orthogonal $\overline{\mathcal{A}}^\perp$ (resp. \mathcal{A}^\perp) est un bi-idéal de \mathcal{A} (resp. $\overline{\mathcal{A}}$)

Proposition II.5.

Les antipodes S et \overline{S} des algèbres de Hopf respectives \mathcal{A} et $\overline{\mathcal{A}}$ sont adjoints l'un de l'autre pour le couplage.

Démonstration. Il faut démontrer que pour toute phrase $v \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \overline{\mathcal{A}}$ on a :

$$\langle Sv, \alpha \rangle = \langle v, \overline{S}\alpha \rangle$$

Si v et α sont des mots cela découle des deux égalités :

$$\begin{aligned} \langle S_0v, \alpha \rangle &= \langle v, S_0\alpha \rangle \\ \langle U(v), \alpha \rangle &= \langle v, U(\alpha) \rangle \end{aligned}$$

et du théorème I.3. Si maintenant v_1 et v_2 sont deux phrases telles que pour tout mot α on ait $\langle Sv_i, \alpha \rangle = \langle v_i, \overline{S}\alpha \rangle$, $i = 1, 2$, on a :

$$\begin{aligned} \langle S(v_1 \bullet v_2), \alpha \rangle &= \langle Sv_2 \bullet Sv_1, \alpha \rangle \\ &= \langle Sv_2 \tilde{\otimes} Sv_1, \Delta\alpha \rangle \\ &= \langle v_1 \tilde{\otimes} v_2, (\overline{S} \tilde{\otimes} \overline{S})\Delta^{\text{op}}\alpha \rangle \\ &= \langle v_1 \tilde{\otimes} v_2, \Delta\overline{S}\alpha \rangle \\ &= \langle v_1 \bullet v_2, S\alpha \rangle \end{aligned}$$

ce qui montre que l'égalité a lieu pour toute phrase v et tout mot α . Répétant ce procédé d'extension du côté dual on obtient la proposition. Le couplage est donc un *couplage d'algèbres de Hopf*. •

Corollaire II.6.

L'orthogonal $\overline{\mathcal{A}}^\perp$ (resp. \mathcal{A}^\perp) est un idéal de Hopf de \mathcal{A} (resp. $\overline{\mathcal{A}}$)

Nous allons maintenant montrer que le couplage est dégénéré, et mettre en évidence un idéal de Hopf explicite non nul \mathcal{J} (resp. $\overline{\mathcal{J}}$) contenu dans l'orthogonal $\overline{\mathcal{A}}^\perp$ (resp. \mathcal{A}^\perp).

Lemme II.7.

pour tout $n \geq 2$, pour tout $x_1, \dots, x_n \in V$ (resp. $\xi_1, \dots, \xi_n \in V^$) et pour tout mot $\alpha \in T(V^*) \subset \overline{\mathcal{A}}$ (resp. $v \in T(V) \subset \mathcal{A}$) on a :*

$$\langle \varphi(U)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n), \alpha \rangle = 0 \quad (\text{resp. } \langle v, \varphi(U)(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n) \rangle = 0)$$

Démonstration. Les espaces V et V^* jouant un rôle symétrique, il suffit de montrer la première assertion du lemme. On a :

$$\langle \varphi(U)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n), \alpha \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k+1} A_{n,k} \langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, \alpha \rangle$$

avec :

$$A_{n,k} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k < n} \frac{n!}{j_1!(j_2 - j_1)! \cdots (n - j_k)!}$$

On introduit la famille de polynômes P_n définie pour $n \geq 1$ par :

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k A_{n,k}$$

On a pour tout mot $\alpha \in T^n(V^*) \subset \overline{\mathcal{A}}$:

$$\langle e^{tU}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n), \alpha \rangle = P_n(t) \langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, \alpha \rangle$$

et donc le lemme est vrai si et seulement si pour tout $n \geq 2$ on a :

$$\int_{-1}^0 P_n(t) dt = 0$$

L'égalité :

$$\frac{U^k}{k!}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{j=1}^{n-1} x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \bullet \frac{U^{k-1}}{(k-1)!}(x_{j+1} \otimes \cdots \otimes x_n)$$

conduit à la relation de récurrence :

$$P_n(t) = 1 + t \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k P_k(t), \quad n \geq 2$$

avec bien sûr $P_1 = 1$. On pose $P_0 = 0$, ce qui nous permet d'écrire pour $n \geq 1$:

$$(1+t)P_n(t) = 1 + t \sum_{k=0}^n C_n^k P_k(t)$$

En considérant une indéterminée supplémentaire z on a donc :

$$\begin{aligned} (1+t) \sum_{n \geq 0} \frac{P_n(t)}{n!} z^n &= e^z - 1 + t \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n P_k(t) \frac{z^n}{k!(n-k)!} \\ &= e^z - 1 + t \sum_{k,l \geq 0} P_k(t) \frac{z^k}{k!} \frac{z^l}{l!} \\ &= e^z - 1 + t e^z \sum_{k \geq 0} P_k(t) \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{P_n(t)}{n!} z^n = \frac{e^z - 1}{1 - t(e^z - 1)}$$

Intégrant les deux membres entre -1 et 0 on a donc :

$$\int_{-1}^0 \sum_{n \geq 0} \frac{P_n(t)}{n!} z^n dt = [-\log(1 - t(e^z - 1))]_{-1}^0 = z$$

d'où $\int_{-1}^0 P_n(t) dt = 0$ pour $n = 0$ et $n \geq 2$, ce qui démontre le lemme

•

On note $S^k(V)$ l'espace des tenseurs symétriques homogènes de degré k , et on pose :

$$S^{(2)}(V) = \bigoplus_{k \geq 2} S^k(V)$$

D'après le § I.4, l'ensemble des $\varphi(U).v, v \in S^{(2)}(V)$ est formé d'éléments primitifs de A , et donc l'idéal \mathcal{J} engendré par cette famille est un idéal de Hopf.

Corollaire II.8.

L'idéal de Hopf \mathcal{J} (resp. $\overline{\mathcal{J}}$) est contenu dans $\overline{\mathcal{A}}^\perp$ (resp. \mathcal{A}^\perp)

Démonstration. Il suffit d'après le corollaire II.4 de montrer que $\varphi(U)(v)$ appartient à $\overline{\mathcal{A}}^\perp$ pour tout $v \in S^{(2)}(V)$. Or cet élément est primitif (théorème I.5) et $\langle \varphi(U)(v), \alpha \rangle = 0$ pour tout mot α , d'après le lemme II.5. Soient maintenant deux phrases α_1 et α_2 de $\overline{\mathcal{A}}$ telles que :

$$\langle \varphi(U)(v), \alpha_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle \varphi(U)(v), \alpha_1 \bullet \alpha_2 \rangle &= \langle \Delta \varphi(U)(v), \alpha_1 \tilde{\otimes} \alpha_2 \rangle \\ &= \langle \varphi(U)(v), \alpha_1 \rangle \langle 1, \alpha_2 \rangle + \langle 1, \alpha_1 \rangle \langle \varphi(U)(v), \alpha_2 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où on déduit que $\langle \varphi(U)(v), \alpha \rangle = 0$ pour toute phrase α . Ceci démontre le théorème II.1.

•

Références

- [Ab] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge (1980)
- [Dr] V.G. Drinfeld, *Quantum Groups*, Proceedings ICM (Berkeley 1986) **1**, 798-820.
- [E-K] P. Etingof & D. Kazhdan, *quantization of Lie bialgebras, I*, prépubl. univ. Harvard (q-alg 9506005)
- [K] Ch. Kassel, *Quantum Groups*, Springer (1995)
- [R] N. Reshetikhin, *Quantization of Lie bialgebras*, Int. Math. res. Notices **7** (1992)
- [Sw] M.E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin (1969)